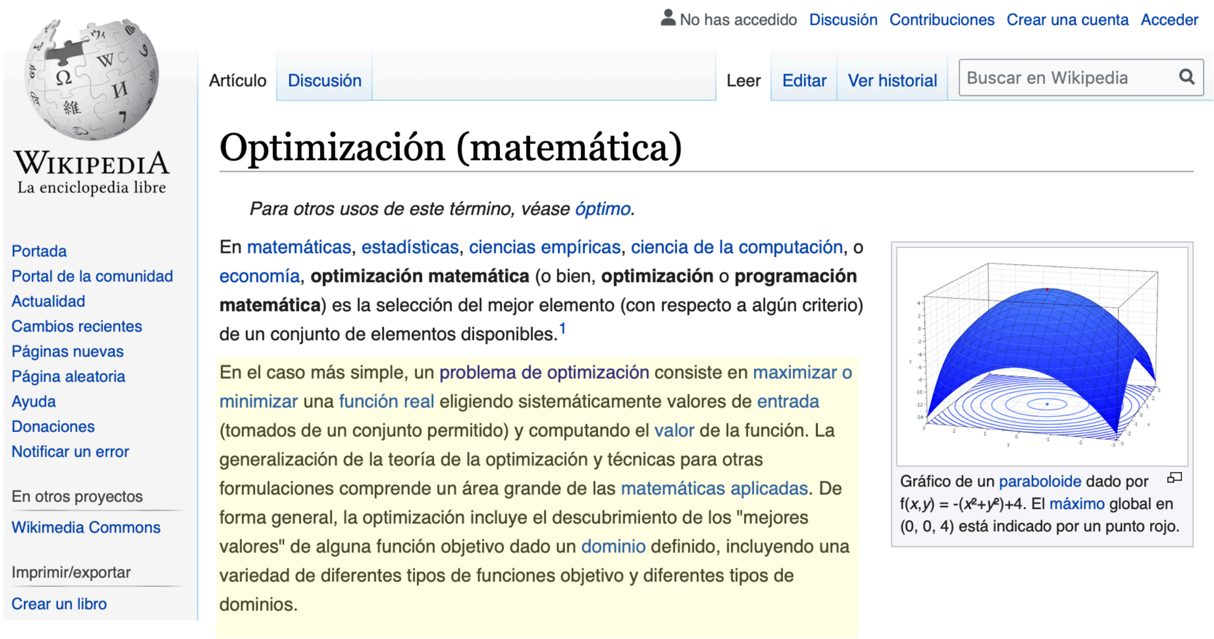
Programación Matemática Introducción

Pedro Luis Luque Calvo



No has accedido Discusión Contribuciones Crear una cuenta Acceder

Artículo Discusión Leer Editar Ver historial Buscar en Wikipedia

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

Portada
Portal de la comunidad
Actualidad
Cambios recientes
Páginas nuevas
Página aleatoria
Ayuda
Donaciones
Notificar un error

En otros proyectos
Wikimedia Commons

Imprimir/exportar
Crear un libro

Optimización (matemática)

Para otros usos de este término, véase óptimo.

En matemáticas, estadísticas, ciencias empíricas, ciencia de la computación, o economía, **optimización matemática** (o bien, **optimización** o **programación matemática**) es la selección del mejor elemento (con respecto a algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles.[1]

En el caso más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de la función. La generalización de la teoría de la optimización y técnicas para otras formulaciones comprende un área grande de las matemáticas aplicadas. De forma general, la optimización incluye el descubrimiento de los "mejores valores" de alguna función objetivo dado un dominio definido, incluyendo una variedad de diferentes tipos de funciones objetivo y diferentes tipos de dominios.

Gráfico de un paraboloide dado por $f(x,y) = -(x^2+y^2)+4$. El máximo global en (0, 0, 4) está indicado por un punto rojo.

Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Optimización_(matemática)

Aplicaciones de la Programación Matemática

- **Aplicaciones financieras**
  - **Selección de un portafolio o cartera de inversión**
  - **Estrategia para financiar proyectos de una empresa**
- **Aplicaciones de marketing**
  - **Elaboración de una campaña publicitaria**
  - **Obtención de una estrategia de ventas**
- **Aplicaciones en sistemas de fabricación**
  - **Programación de la producción**
  - **Asignación de mano de obra**
  - **Problemas de inventario**
- **Aplicación a problemas de transporte**
- **Problemas de asignación de recursos o personas**
- **Problemas de mezclado**
- **Problemas de dieta**
- **Problemas de localización**
- **Problemas de empaquetamiento**
- **Problemas del viajante**
- **Problemas de horarios**
- **ETC**.

Ejemplo (Producción)

Una empresa puede emplear tres procesos de producción diferentes, en cada uno de los cuales se precisa utilizar tres máquinas. Según el proceso productivo elegido para fabricar una unidad de producto se necesita usar cada una de las máquinas las siguientes horas:

	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3
Máquina 1	2	1	3
Máquina 2	4	2	3
Máquina 3	3	4	2

Cada máquina está disponible 50 horas. El beneficio por unidad de producto fabricado con el proceso 1 es de 15 u.m. (unidades monetarias), con el proceso 2 de 18 u.m. y de 10 u.m. si se emplea el proceso 3.

Se pide:

1. ¿Cómo debería organizarse la producción para obtener el máximo beneficio?
2. ¿Cómo debe organizarse la producción para obtener al menos un beneficio de 200 u.m. y minimizar el número de horas que se empleará la máquina 2?

Formulación

- PASO 1: Idenficiar las **variables de decisión**:
    - $x_1 =$ número de unidades de producto fabricadas mediante el proceso 1
    - $x_2 =$ número de unidades de producto fabricadas mediante el proceso 2
    - $x_3 =$ número de unidades de producto fabricadas mediante el proceso 3

- PASO 2: Escribir la **función objetivo** y las **restricciones del problema**:

El beneficio por unidad de producto fabricado

- con el proceso 1 es de 15 u.m. (unidades monetarias),
- con el proceso 2 de 18 u.m.
- y de 10 u.m. si se emplea el proceso 3.

	Proceso 1	Proceso 2	Proceso 3
Máquina 1	2	1	3
Máquina 2	4	2	3
Máquina 3	3	4	2

$$
\begin{array}{llll}
Maximizar & 15x_1 + 18x_2 + 10x_3 & & \text{(beneficio)} \\
sujeto\ a: & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 1)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 2)} \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 3)} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq 0 & \text{(no negatividad)}
\end{array}
$$

- PASO 3: **Resolución**

Solución óptima: $(x_1^* = 10, x_2^* = 5, x_3^* = 0)$ con $z^* = 240$, o lo que es lo mismo, producir

- 10 unidades por el proceso 1
- 5 unidades por el proceso 2
- 0 unidades (no producir) por el proceso 3

Se obtendría un **beneficio máximo de 240 unidades monetarias**.

Usar informática para resolver problemas

$$
\begin{array}{llll}
Maximizar & 15x_1 + 18x_2 + 10x_3 & & \text{(beneficio)} \\
sujeto\ a: & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 1)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 2)} \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 3)} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq 0 & \text{(no negatividad)}
\end{array}
$$

Con lenguaje AMPL:

```
# fichero modelo.mod
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;
var x3 >= 0;

maximize z:
   15 * x1 + 18 * x2 + 10 * x3;

s.t. r1: 2*x1+x2+3*x3 <= 50;
s.t. r2: 4*x1+2*x2+3*x3 <= 50;
s.t. r3: 3*x1+4*x2+2*x3 <= 50;
```

Uso de AMPLIDE+AMPL para resolver el problema

Console

```
AMPL
ampl: reset;
ampl: model modelo.mod;
ampl: option solver cplex;
ampl: solve;
CPLEX 12.6.3.0: optimal solution; objective 240
2 dual simplex iterations (1 in phase I)
ampl: display x1,x2,x3,z;
x1 = 10
x2 = 5
x3 = 0
z = 240

ampl:
```

modelo.mod | modelohorario01

```
# fichero modelo.mod
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;
var x3 >= 0;

maximize z:
   15 * x1 + 18 * x2 + 10 * x3;

s.t. r1: 2*x1+x2+3*x3 <= 50;
s.t. r2: 4*x1+2*x2+3*x3 <= 50;
s.t. r3: 3*x1+4*x2+2*x3 <= 50;
```


Otro planteamiento

2. ¿Cómo debe organizarse la producción para obtener al menos un beneficio de 200 u.m. y minimizar el número de horas que se empleará la máquina 2?

Las variables de decisión serían las mismas. La formulación sería la siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
\textit{Minimizar} & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & & \text{(número de horas Máquina 2)} \\
\textit{sujeto a}: & 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 1)} \\
 & 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 2)} \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq 50 & \text{(horas disponibles Máquina 3)} \\
 & 15x_1 + 18x_2 + 10x_3 & \geq 200 & \text{(al menos un beneficio de 200 u.m.)} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 & \geq 0 & \text{(no negatividad)}
\end{array}
$$

- **Solución óptima:** $(x_1^* = 0, x_2^* = \frac{100}{9} = 11.11, x_3^* = 0)$ con $z_2^* = \frac{200}{9} = 22.22$, o lo que es lo mismo, producir
  - 0 unidades (no producir) por el proceso 1
  - 11.11 unidades por el proceso 2
  - 0 unidades (no producir) por el proceso 3

  Se obtendría un **mínimo de horas en la máquina 2 es de:** $\frac{200}{9} = 22.22$ **horas**.

  El beneficio alcanzado es exactamente 200 u.m.

Generalización

Este problema podría ser más general, tuviese n procesos, es decir:

- $x_i =$ número de unidades de producto fabricadas mediante el proceso i-ésimo, $i = 1, \ldots, n$

Y hubiese m máquinas. Con la información correspondiente, el problema podría escribirse como:

$$
\begin{array}{llll}
Maximizar & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & \text{(beneficio)} \\
sujeto\ a: & \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i & \leq b_j & \text{(horas disponibles Máquina j-ésima)},\ j = 1, \ldots, m \\
 & x_i & \geq 0 & i = 1, \ldots, n \quad \text{(no negatividad)}
\end{array}
$$

Formulación general con AMPL:

```
param n > 0, integer;
param m > 0, integer;
var x {1..n} >= 0;
param c {1..n};
param b {1..m};
param a {1..m,1..n};

maximize z:
    sum {i in 1..n} c[i]*x[i] ;

s.t. restj {j in 1..m}:
    sum {i in 1..n} a[j,i]*x[i] <= b[j] ;
```

Habrá que especificar los datos-parámetros para el problema particular que se quiera resolver.

Cómo plantear un problema de programación matemática

Un problema de programación matemática representa un proceso de optimización en el cuál encontraremos lo siguiente:

- **Variables de decisión**

  Son las variables que están bajo el control de la persona que toma las decisiones. Sus valores óptimos se determinarán al resolver el problema.

- **Función objetivo**

  Expresa matemáticamente el objetivo que se pretende alcanzar en la solución del problema; ya sea minimizar o maximizar.

  Por ejemplo: maximizar las utilidades de la empresa o minimizar los costos de producción.

- **Restricciones**

  Son las limitaciones que restringen las opciones permisibles para las variables de decisión.

  Cada restricción se expresa matemáticamente con cualquiera de estos signos:

  - Menor que o igual a ($\leq$). Cuando existe un límite superior, por ejemplo: las horas extras de trabajo no pueden ser mayor a 2 horas diarias
  - Igual a ($=$). Indica una relación obligatoria, por ejemplo: el inventario final es igual al inventario inicial más la producción menos las ventas.
  - Mayor que o igual a ($\geq$). Cuando existe un límite inferior, por ejemplo: la producción de cierto producto debe ser superior a la demanda pronosticada.

  Cualquier problema de programación matemática suele presentar una o varias restricciones.

  Se debe considerar dentro de **las restricciones la no negatividad de las variables de decisión**.